Упражнения к разделу 7.5.1

1. Условие: используя метод бисекций, аппроксимировать с точностью ε = 0.01 второй положительный корень уравнения , изолирующий интервал которого (3/2, 2).

Решение: обозначим уравнение как P(x). a – b = 0.5 < ε. Значение P(x) в точке a = 3/2 равно -1/8 < 0, в точке b = 2 равно 1 > 0, (a + b)/2 = 7/4, P(7/4) = 7/64. Следовательно, принимаем b = 7/4.

b - a = 0.25, (a + b)/2 = 13/8. P(13/8) = -43/512. Принимаем a = 13/8.

b - a = 0.125, (a + b) /2 = 27/16. P(27/16) = (-29/4096). Принимаем a = 27/16.

b - a = 0.0625, (a + b) /2 = 55/32. P(55/32) = 1511/32768. Принимаем b = 55/32.

b - a = 0.03125, (a + b)/2 = 109/64. P(109/64) 0.0182686. Принимаем b = 109/64.

b - a = 0.015625, (a + b)/2 = 217/128. P(217/128) 0.00528383. Принимаем b = 217/128,

b - a = 0.0078125 < ε, a 1.69, 1.69 – корень уравнения с точностью 0.01.

1. Используя метод бисекций, аппроксимировать с точностью ε = 0.01 вещественные корни следующих полиномиальных уравнений в интервале (-2, 4):

а)

Решение: воспользуемся теоремой Штурма. Для данного полинома sseq(x) = { – коэффициенты при старших членах положительны, уравнение не имеет комплексных корней.

Положительные корни лежат в интервале (0, 4). Sseq(0) = {1, -3, -1, 1} – 2 перемены знака, sseq(4) = {53, 45, 7, 1} – 0 перемен знака. Следовательно, в интервале (0, 4) 2 корня.

Применим метод бисекций: (0 + 4)/2 = 2, sseq(2) = {3, 9, 3, 1} – 0 перемен знака, оба корня находятся на интервале (0, 2).

(0 + 2)/2 = 1, sseq(1) = {-1, 0, 1, 1} – 1 перемена знака.

Получаем: первый изолирующий интервал – (0, 1), второй изолирующий интервал – (1, 2).

Многочлен имеет три корня, следовательно, единственный отрицательный корень лежит в интервале (-2, 0).

Применим метод бисекций для аппроксимации значений корней.

Обозначим полином за P(x), рассмотрим интервал (-2, 0).

P(-2) = -1 < 0, P(0) = 1 > 0. a = -2, b = 0. b – a = 2 > ε. (a + b)/2 = -1, P(-1) = 3 > 0, принимаем b = -1.

b – a = 1, (a + b)/2 = -3/2, P(-3/2) = 17/8, принимаем b = -3/2.

b – a = 0.5, (a + b)/2 = - 7/4, P(-7/4) = 57/64, принимаем b = -7/4.

b – a = 0.25, (a + b)/2 = -15/8, P(-15/8) = 17/512, принимаем b = -15/8.

b – a = 0.125, (a + b)/2 = -31/16, P(-31/16) = -1887/4096, принимаем a = -31/16.

b – a = 0.0625, (a + b)/2 = -61/32, P(-61/32) - 0.20816, принимаем a = -61/32.

b – a = 0.03125, (a + b)/2 = -121/64, P(-121/64) -0.0860939, принимаем a = -121/64.

b – a = 0.015625, (a + b)/2 = -241/128, P(-241/128) -0.0261006, принимаем a = -241/128.

b – a = 0.0078125 < ε, b - 1.88, -1.88 – первый корень уравнения с точностью 0.01.

Рассмотрим интервал (0, 1).

P(0) = 1 > 0, P(1) = -1 < 0. a = 0, b = 1, b – a = 1 > ε, (a+b)/2 = 1/2, P(1/2) = -3/8, b = 1/2.

b – a = 0.5, (a + b)/2 = 1/4, P(1/4) = 17/64, a = 1/4.

b – a = 0.25, (a + b)/2 = 3/8, P(3/8) = -37/512, b = 3/8.

b – a = 0.125, (a + b)/2 = 5/16, P(5/16) = 381/4096, a = 5/16.

b – a = 0.0625, (a + b)/2 = 11/32, P(11/32) 0.0093689, a = 11/32.

b – a = 0.03125, (a + b)/2 = 23/64, P(23/64) -0.0317116, b = 23/64.

b – a = 0.015625, (a + b)/2 = 45/128 , P(45/128) -0.0112357, b = 45/128.

b – a = 0.0078125 < ε, a 0.34, 0.34 – второй корень уравнения с точностью 0.01.

Рассмотрим интервал (1, 2).

P(1) = -1 < 0, P(2) = 3 > 0. a = 1, b = 2, b – a = 1 > ε, (a + b)/2 = 3/2, P(3/2) = -1/8, a = 3/2.

b – a = 0.5, (a + b)/2 = 7/4, P(7/4) = 71/64, b = 7/4.

b – a = 0.25, (a + b)/2 = 13/8, P(13/8) = 0.416015625, b = 13/8.

b – a = 0.125, (a + b)/2 = 25/16, P(25/16) = 0.127197265625, b = 25/16.

b – a = 0.0625, (a + b)/2 = 49/32, P(49/32) -0.00338745117, a = 49/32.

b – a = 0.03125, (a + b)/2 =99 /64, P(99/64) 0.06077194213, b = 99/64.

b – a = 0.015625, (a + b)/2 = 197/128 , P(197/128) 0.0284104347229, b = 45/128.

b – a = 0.0078125 < ε, a 1.53, 1.53 – третий корень уравнения с точностью 0.01.

Ответ: -1.88, 0.34, 1.53.

б)

Решение: воспользуемся теоремой Штурма. Для данного полинома sseq(x) = { – коэффициенты при старших членах положительны, уравнение не имеет комплексных корней.

Положительные корни лежат в интервале (0, 4). Sseq(0) = {2, 6, -7, -1, 1} – 2 перемены знака, sseq(4) = {42, 78, 33, 3, 1} – 0 перемен знака. Следовательно, в интервале (0, 4) 2 корня.

Применим метод бисекций: (0 + 4)/2 = 2, sseq(2) = {2, -6, -7, 1, 1} – 2 переменs знака, оба корня находятся на интервале (2, 4).

(2 + 4)/2 = 3, sseq(3) = {2, 12, 8, 2, 1} – 0 перемен знака, корни находятся на изолирующем интервале (2, 3).

(2 + 3)/2 = 5/2, sseq(2.5) = {-0.1875, -1.5, -0.75, 2, 1} – 1 перемена знака

Получаем: первый изолирующий интервал – (2, 2.5), второй изолирующий интервал – (2.5, 3).

Отрицательные корни лежат на интервале (-2, 0). Sseq(0) = {2, 6, -7, -1, 1} – 2 перемены знака, sseq(-2) – {42, -78, 33, -3, 1} - 4 перемены знака, оба отрицательных корня лежат на интервале (-2, 0).

(-2 + 0)/2 = -1, sseq(-1) = {2, -12, 8, -2, 1} – 4 перемены знака, корни находятся на интервале (-1, 0).

(-1 + 0)/2 = -0.5, sseq(-0.5) = {-0.1875, 1.5, -0.75, -1.5, 1} – три перемены знака, корни лежат на интервалах (-1, -0.5) и (-0.5, 0).

Рассмотрим интервал (2, 2.5).

P(a) = 2.0, P(b) = -0.1875, b - a = 0.5, b - a = 0.5, (a + b)/2 = 2.25, P(c) = 0.62890625, a = 2.25

b - a = 0.25, (a + b)/2 = 2.375, P(c) = 0.121337890625, a = 2.375

b - a = 0.125, (a + b)/2 = 2.4375, P(c) = -0.0619964599609375, b = 2.4375

b - a = 0.0625, (a + b)/2 = 2.40625, P(c) = 0.022965431213378906, a = 2.40625

b - a = 0.03125, (a + b)/2 = 2.421875, P(c) = -0.02125638723373413, b = 2.421875

b - a = 0.015625, (a + b)/2 = 2.4140625, P(c) = 0.00042742863297462463, a = 2.4140625

b – a < 0.01, a 2.41, 2.41 – корень с точностью 0.01

Рассмотрим интервал (2.5, 3).

P(a) = -0.1875, P(b) = 2.0, b - a = 0.5

b - a = 0.5, (a + b)/2 = 2.75, P(c) = 0.06640625, b = 2.75

b - a = 0.25, (a + b)/2 = 2.625, P(c) = -0.230224609375, a = 2.625

b - a = 0.125, (a + b)/2 = 2.6875, P(c) = -0.1291351318359375, a = 2.6875

b - a = 0.0625, (a + b)/2 = 2.71875, P(c) = -0.043791770935058594, a = 2.71875

b - a = 0.03125, (a + b)/2 = 2.734375, P(c) = 0.0081215500831604, b = 2.734375

b - a = 0.015625, (a + b)/2 = 2.7265625, P(c) = -0.018621619790792465, a = 2.7265625

b – a < 0.01, a 2.73, 2.73 – корень с точностью 0.01

Рассмотрим интервал (-1, -0.5).

P(a) = 2.0, P(b) = -0.1875, b - a = 0.5

b - a = 0.5, (a + b)/2 = -0.75, P(c) = 0.06640625, a = -0.75

b - a = 0.25, (a + b)/2 = -0.625, P(c) = -0.230224609375, b = -0.625

b - a = 0.125, (a + b)/2 = -0.6875, P(c) = -0.1291351318359375, b = -0.6875

b - a = 0.0625, (a + b)/2 = -0.71875, P(c) = -0.043791770935058594, b = -0.71875

b - a = 0.03125, (a + b)/2 = -0.734375, P(c) = 0.0081215500831604, a = -0.734375

b - a = 0.015625, (a + b)/2 = -0.7265625, P(c) = -0.018621619790792465, b = -0.7265625

b – a < 0.01, b -0.73, -0.73 – корень с точностью 0.01

Рассмотрим интервал (-0.5, 0)

P(a) = -0.1875, P(b) = 2.0, b - a = 0.5

b - a = 0.5, (a + b)/2 = -0.25, P(c) = 0.62890625, b = -0.25

b - a = 0.25, (a + b)/2 = -0.375, P(c) = 0.121337890625, b = -0.375

b - a = 0.125, (a + b)/2 = -0.4375, P(c) = -0.0619964599609375, a = -0.4375

b - a = 0.0625, (a + b)/2 = -0.40625, P(c) = 0.022965431213378906, b = -0.40625

b - a = 0.03125, (a + b)/2 = -0.421875, P(c) = -0.02125638723373413, a = -0.421875

b - a = 0.015625, (a + b)/2 = -0.4140625, P(c) = 0.00042742863297462463, b = -0.4140625

b – a < 0.01, b -0.41, -0.41 – корень с точностью 0.01

Ответ: -0.73, -0.41, 2.41, 2.73.

в)

Решение: воспользуемся теоремой Штурма. Для данного полинома sseq(x) = { – есть отрицательные коэффициенты при старших степенях. При sseq(-∞) – 4 перемены знака при старших коэффициентах, при sseq(∞) – 1 перемена знака при старших коэффициентах. 4 – 1 = 3, следовательно, есть 3 действительных корня.

Положительные корни лежат в интервале (0, 4). Sseq(0) = {2, -10, -5.5, 131.6, 2232.4, -1} – 3 перемены знака, sseq(4) = {21402.0, 26710.0, 1170.5, -26232.4, -88939.6, -1} – 1 перемена знака. Следовательно, в интервале (0, 4) 2 корня.

Применим метод бисекций: (0 + 4)/2 = 2, sseq(2) = {622, 1670, 318.5, -7370.4, -43353.6, -1} – 1 перемена знака, оба корня находятся на интервале (0, 2).

(0 + 2)/2 = 1, sseq(1) = {-3.0, 70.0, 93.5, -2199.4, -20560.6, -1} – 2 перемены знака.

Получаем: первый изолирующий интервал – (0, 1), второй изолирующий интервал – (1, 2).

Sseq(-2) = {-618, 1510, 150.5, -3726.4, 47818.4, -1} – 4 перемены знака, sseq(0) = {2, -10, -5.5, 131.6, 2232.4, -1} – 3 перемены знака, единственный действительный отрицательный корень лежит в интервале (-2, 0).

Рассмотрим интервал (-2, 0).

P(a) = -618.0, P(b) = 2.0, b - a = 2.0

b - a = 2.0, (a + b)/2 = -1.0, P(c) = -23.0, a = -1.0

b - a = 1.0, (a + b)/2 = -0.5, P(c) = 1.6875, b = -0.5

b - a = 0.5, (a + b)/2 = -0.75, P(c) = -4.9140625, a = -0.75

b - a = 0.25, (a + b)/2 = -0.625, P(c) = -0.7069091796875, a = -0.625

b - a = 0.125, (a + b)/2 = -0.5625, P(c) = 0.6711692810058594, b = -0.5625

b - a = 0.0625, (a + b)/2 = -0.59375, P(c) = 0.03226768970489502, b = -0.59375

b - a = 0.03125, (a + b)/2 = -0.609375, P(c) = -0.3241053335368633, a = -0.609375

b - a = 0.015625, (a + b)/2 = -0.6015625, P(c) = -0.14270315889734775, a = -0.6015625

b - a = 0.0078125 < 0.01, a -0.60, -0.60 – корень с точностью 0.01.

Рассмотрим интервал (0, 1).

P(a) = 2.0, P(b) = -3.0, b - a = 1.0

b - a = 1.0, (a + b)/2 = 0.5, P(c) = -7.0625, b = 0.5

b - a = 0.5, (a + b)/2 = 0.25, P(c) = -1.7109375, b = 0.25

b - a = 0.25, (a + b)/2 = 0.125, P(c) = 0.4393310546875, a = 0.125

b - a = 0.125, (a + b)/2 = 0.1875, P(c) = -0.5673103332519531, b = 0.1875

b - a = 0.0625, (a + b)/2 = 0.15625, P(c) = -0.04593837261199951, b = 0.15625

b - a = 0.03125, (a + b)/2 = 0.140625, P(c) = 0.20129739120602608, a = 0.140625

b - a = 0.015625, (a + b)/2 = 0.1484375, P(c) = 0.07881986896973103, a = 0.1484375

b - a = 0.0078125 < 0.01, a 0.15, 0.15 – корень с точностью 0.01.

Рассмотрим интервал (1, 2).

P(a) = -3.0, P(b) = 622.0, b - a = 1.0

b - a = 1.0, (a + b)/2 = 1.5, P(c) = 119.1875, b = 1.5

b - a = 0.5, (a + b)/2 = 1.25, P(c) = 31.4921875, b = 1.25

b - a = 0.25, (a + b)/2 = 1.125, P(c) = 9.4871826171875, b = 1.125

b - a = 0.125, (a + b)/2 = 1.0625, P(c) = 2.2506446838378906, b = 1.0625

b - a = 0.0625, (a + b)/2 = 1.03125, P(c) = -0.6006072759628296, a = 1.03125

b - a = 0.03125, (a + b)/2 = 1.046875, P(c) = 0.7658465467393398, b = 1.046875

b - a = 0.015625, (a + b)/2 = 1.0390625, P(c) = 0.06816888332832605, b = 1.0390625

b - a = 0.0078125 < 0.01, b 1.04, 1.04 – корень с точностью 0.01.

Ответ: -0.60, 0.15, 1.04.